

KMAPによる微分方程式の解法(3)－特殊関数

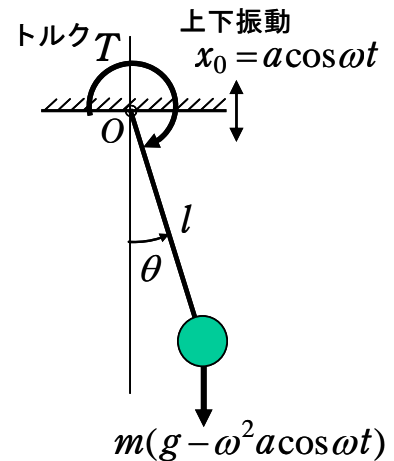
③＜マシユ－の微分方程式＞

(B) H27(2015). 5. 25 片柳亮二

微分方程式の初期値問題をKMAPで解く方法について述べる.

[例題 3.3] マシユ－の微分方程式

図(a)のように, O 点の高さ x_0 が上下振動している場合, O 点に固定した長さ l の棒に質量 m の物体をつるした. 質量 m の振り子振動の角度 θ は小さいとして, その振動特性を解析せよ. ただし, $l=0.3(\text{m})$, $m=0.5(\text{kg})$, $a=0.05(\text{m})$ とする. なお, 棒の質量は無視する. ω の値は $1.0(\text{rad/s})$ および $5.7(\text{rad/s})$ とする. (これはばね定数が増化する単振り子である)



図(a)

質量 m に働く加速度は, 重力 g の他に O 点の加速度分

$$\ddot{x}_0 = -\omega^2 a \cos \omega t \quad (1)$$

が加わるので, 運動方程式は O 点まわりの慣性モーメントを I として, 次式で与えられる.

$$I\ddot{\theta} = -m(g - \omega^2 a \cos \omega t)l \sin \theta - T \quad (2)$$

ここで, 慣性モーメントは $I = ml^2$, T は初期運動を誘起するための外力である. 角度 θ は小さいとして, $\sin \theta \doteq \theta$ と近似すると, 運動方程式は次のようになる.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g - \omega^2 a \cos \omega t}{l} \theta - \frac{T}{ml^2} \quad (3)$$

ここで, T は初期運動を誘起するための外力である.

(3)式は, ばね定数が周期的に増減する単振り子であり, **マシユ－(Mathieu)の微分方程式**といわれる.

(2)式は **2階の微分方程式**であるので, $q = \dot{\theta}$ とおくと, 次の **1階の微分方程式**によって表される.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g - \omega^2 a \cos \omega t}{l} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \cdot z_1, \quad z_1 = T \quad (4)$$

この状態方程式をKMAPで解くために、次の行列のインプットデータを準備する。

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g - \omega^2 a \cos \omega t}{l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

(この行列の0以外の要素にデータを設定する)(下記インプットデータ参照)

この微分方程式をKMAPにより直接解いてみよう。

EIGE. Q3. 1-3. DAT ... (マシュ-型単振り子)

```

1 //AP, B2 行列データ設定
2 H11=G; (m) H 0 0.5000E+00 11 11 0 0 0 0
3 H12=G; (l) H 0 0.3000E+00 11 12 0 0 0 0
4 H13=G; (g) H 0 0.9800E+01 11 13 0 0 0 0
5 H16=G; (-1.0) H 0 -0.1000E+01 11 16 0 0 0 0
6 H17=H16/H11; (-1/m) H 0 24 17 16 11 0 0
7 H18=H17/H12; (-1/ml) H 0 24 18 17 12 0 0
8 H19=H18/H12; (-1/ml2) H 0 24 19 18 12 0 0
9 H20=G; (OMEGA) H 0 0.5700E+01 11 20 0 0 0 0
10 H21=H20*H20; (ω2) H 0 23 21 20 20 0 0
11 H22=G; (a) H 0 0.5000E-01 11 22 0 0 0 0
12 H23=E68; (t) H 0 13 23 68 0 0 0
13 H24=H20*H23; (OMEGA*t) H 0 23 24 20 23 0 0
14 H25=H24*G; OMEGA*t(deg) H 0 0.5730E+02 17 25 24 0 0 0
15 H26=FCOSD[H25]; cos ω t H 0 19 26 25 0 0 0
16 H27=H21*H22; (ω 2a) H 0 23 27 21 22 0 0
17 H28=H27*H26; ω 2a cos ω t H 0 23 28 27 26 0 0
18 H29=H28-H13; H 0 22 29 28 13 0 0
19 H30=H29/H12; H 0 24 30 29 12 0 0
20 //
21 AP(I1, J2); H 0 0.1000E+01 611 1 2 0 0 0
22 AP(I2, J1)H30; H 0 621 2 1 30 0 0
23 //(コントロール入力)=(Z1, Z3, Z5)
24 B2(I2, J1)H19; H 0 623 2 1 19 0 0
25 //
26 {Print(AP, B2, CP)} I2, J1, K1; H 0 671 2 1 1 0 0
27 //(コントロール Z1 に強制力インプット)
28 Z1=U1*G; H 0 0.1000E+01 52 1 1 0 0 0
29 //-----
30 //安定解析出力に追加する場合
31 //は、下記に R(6+NXp)~を設定.
32 //シミュレーション用出力(Z191~Z200)
33 //(このデータが TES6. DAT に入る)
34 Z191=Z6*G; (x1) H 0 0.1000E+01 53 191 6 0 0 0
35 Z192=Z7*G; (x2) H 0 0.1000E+01 53 192 7 0 0 0
36 Z193=H28; (ω 2a cos ω t) H 0 54 193 28 0 0 0
37 //(最後に次の END 文が必要)

```

```

38 {Pitch Data END};          H 0          899 888  0  0  0  0
39 {Control Data END};       H 0          999  0  0  0  0  0

```

解析は以下のように行う。

コンピュータ C:\KMAP ホルダー内において

- ① “KMAP**実行スタートファイル.BAT” をダブルクリックして立ち上げ
キーイン： 0 4 （前の解析結果の表示画面からは 0 2 4）
⇒ 「EIGE」の解析ルーチンに入る
- ②キーイン： 3 7 18
⇒ 「(現在のファイル名) : EIGE.Q3.1-3.DAT」が表示
- ③キーイン： 0 （“0”は新しいファイル名で別名でもよい）
⇒ リストが表示される。
- ④キーイン： 0 1 4
⇒ 解析結果が表示される。

■ 結果表示 9 : 安定解析結果 (EIGE.Q3.1-3.DAT)

```

***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.5220D+01
N      REAL      IMAG
1      0.00000000D+00  -0.52203127D+01 [ 0.0000E+00, 0.5220E+01]
2      0.00000000D+00   0.52203127D+01   周期 P(sec)= 0.1204E+01
ZEROS( 0), II/JJ= 4/ 1, G=-0.2222D+02
N      REAL      IMAG

```

固有角振動数 ω_n



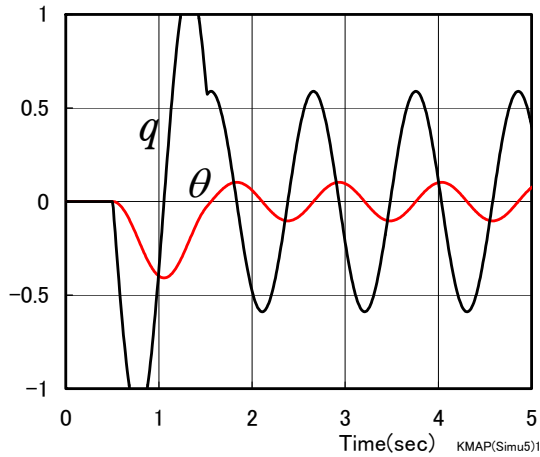
なお、 $t=0$ として固有角振動数を手計算すると同様な結果が得られる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g - \omega^2 a}{l}} = \sqrt{\frac{9.8 - 5.7^2 \times 0.05}{0.3}} = 5.22 \text{ (rad/s)}$$

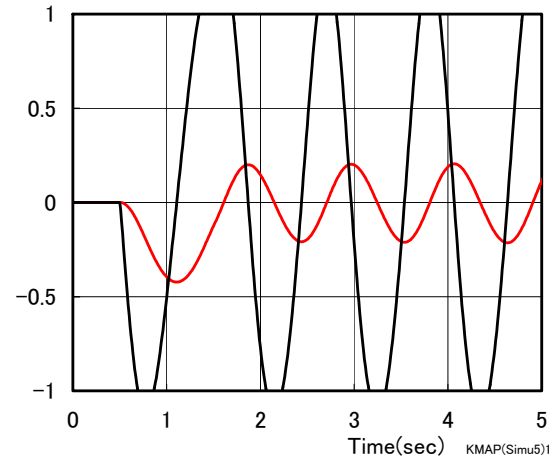
■ 結果表示 7 : シミュレーション図

(EIGE.Q3.1-1.DAT) (EIGE.Q3.1-3.DAT) (EIGE.Q3.1-3(2).DAT)

問題 2-2(単振り子)で検討した O 点の上下変動なし(下記図(c))の振動数が $5.7(\text{rad/s})$ であるので, $\omega=5.7\text{rad/s}$ で O 点を変動させると図(d)のように振動が大きくなる.

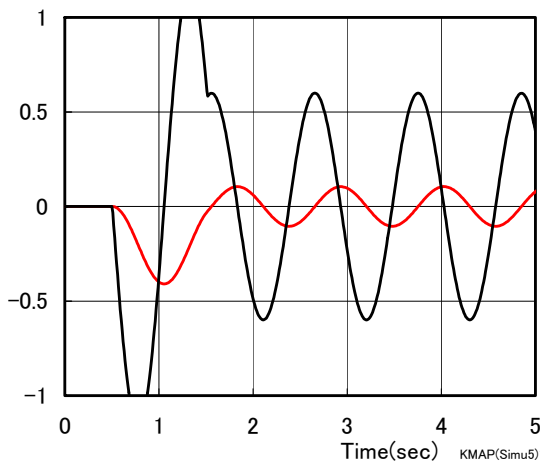


図(c) O 点の変動なし
(EIGE.Q3.1-1.DAT)

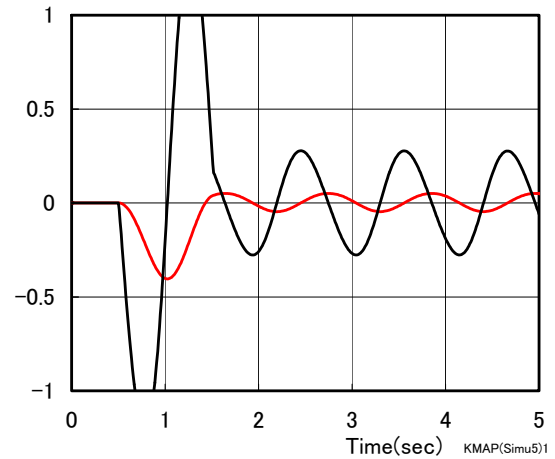


図(d) O 点が $x_0=0.05\cos\omega t$
(EIGE.Q3.1-3.DAT) ($\omega=5.7\text{rad/s}$)

図(e)は, $\omega=1.0\text{rad/s}$ の場合であるが変動なしの場合と変わらない結果である. また図(f)は, $\omega=5.7\text{rad/s}$ であるが逆位相で O 点を変動させた場合であり, 振動が小さくなっている.

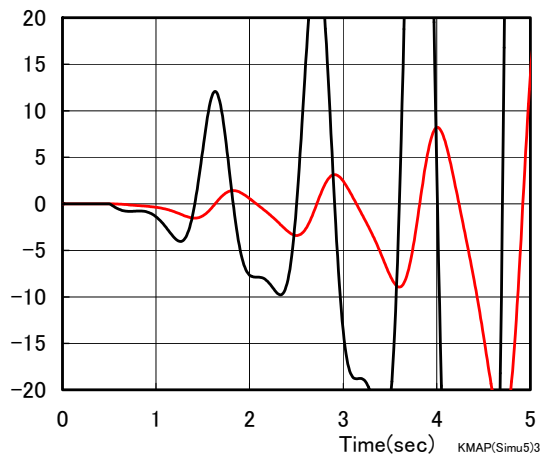


図(e) O 点が $x_0=0.05\cos\omega t$
($\omega=1.0\text{rad/s}$)

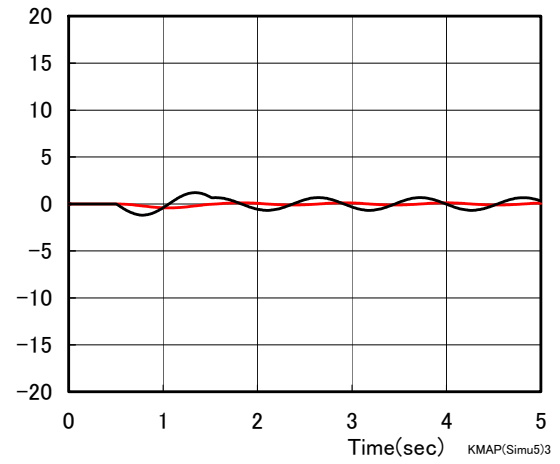


図(f) O 点が $x_0=-0.05\cos\omega t$
($\omega=5.7\text{rad/s}$, 逆位相)

図(g)は、 $\omega=5.7\text{rad/s}$ でO点の高さの変動の振幅を0.4(m)に増加させた場合であり不安定となる。しかし、図(h)に示すように、同じ振幅で $\omega=1.0\text{rad/s}$ とすると安定（単純な振り子の振動）となる。



図(g) O点が $x_0=0.4\cos\omega t$
(EIGE.Q3.1-3(2).DAT) ($\omega=5.7\text{rad/s}$)



図(h) O点が $x_0=0.4\cos\omega t$
($\omega=1.0\text{rad/s}$)

以上